第７講　実践演習問題 第１問・第２問

第１問

〔１〕

(1)　x^2-4x+7 を $x-1$ で割ると商は $x-$ ア ，余りは イ である。

(2)　$x>1$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{x-1}{x^2-4x+7}$ とする。

$\dfrac{x-1}{x^2-4x+7}$ の分母，分子を $x-1$ で割って， ウ を利用すると，

θ は $x=$ エ のとき　最小値 $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi$ をとる。

ウ に当てはまる最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

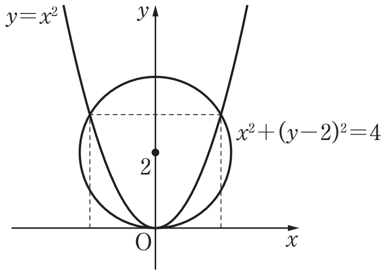
⓪　相加平均・相乗平均の大小関係　　①　因数定理

②　剰余の定理　　③　余弦定理

< NOTE >

〔2〕 座標平面上に放物線 $L：y=x^2$ と円 $C：x^2+(y-a)^2=4$ がある。ただし，a は定数とする。放物線 L と円 C の共有点の個数について考える。

(1) $a=2$ のとき，放物線 L と円 C の共有点の個数を求めるには $y=x^2$ を $x^2+(y-2)^2=4$ に代入し，2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ を解けばよい。このとき [キ] あることから，共有点の個数は 3 個となる。



[キ] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が正の数と負の数が 1 つずつ

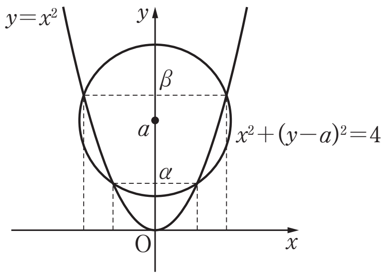
① 2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が異なる正の数が 3 つ

② 2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が 0 と正の数が 1 つ

③ 2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が異なる正の数が 2 つ

（第１問〔２〕は次ページに続く。）

(2)　放物線 L と円 C の共有点が 4 個あるための条件を，以下のようにして求めた。



$y=x^2$ を $x^2+(y-a)^2=4$ に代入し，整理すると

$$y^2-(2a-1)y+a^2-4=0 \quad \cdots①$$

となった。

①の判別式を D，2 つの解を α，β とすると，

4 個の共有点をもつためには，[ク] が成り立てばよい。

[ク] に当てはまるものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$D \geqq 0$

①　$D \geqq 0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

②　$D \geqq 0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta \geqq 0$

③　$D \geqq 0$，$\alpha+\beta \geqq 0$，$\alpha\beta>0$

④　$D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

⑤　$D>0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$

〔３〕 先生と太郎さんと花子さんが音の大きさについて会話している。三人の会話を読み，下の問いに答えよ。

> 太郎さん：音の大きさを測るのにdb(デシベル)があったね。
>
> 花子さん：習った気がするけれど，dbって何だっけ？
>
> 先生：dbは次のように定められています。「人間が聞くことができる限界の音圧を x_0，測定している音の音圧を x としたとき，測定している音の大きさ y db は $y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ と表される」でした。
>
> 花子さん：確か，静かな図書館は40db，地下鉄の車内は80dbと聞いた気がする。
>
> 太郎さん：だったら，家で掃除しているときの掃除機の音は60db位かな。
>
> 先生：人の呼吸音は10dbですが，呼吸音の音圧は x_0 の ［ケ］ 倍になります。

(1) ［ケ］ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{20}$　③ $\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ $\sqrt{20}$

（第１問〔３〕は次ページに続く。）

(2)

花子さん：静かな図書館は 40 db，地下鉄の車内は 80 db だから，音の大きさは2倍だけれど，音圧は何倍になっているのかしら？

太郎さん：静かな図書館，地下鉄の車内の音圧をそれぞれ x_1，x_2 とし，x_1，x_2 を x_0 で表して考えればいいね。

花子さん：x_1，x_2 を x_0 で表さなくても，できるんじゃないかしら？

先生：どちらの方法でも求められますね。

地下鉄の車内の音圧は静かな図書館の音圧の **コ** 倍である。**コ** に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 2　① 4　② $\log_{10}2$　③ $\log_{10}4$　④ 10　⑤ 100

(第１問〔３〕は次ページに続く。)

(3)

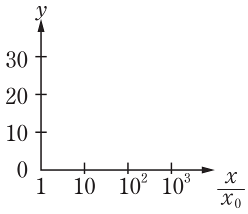
太郎さん：ジェット機の音は相当大きいだろうな。

花子さん：120 db だと聞いたことがあるわ。

太郎さん：音圧は数式 $120=20\log_{10}\frac{x}{x_0}$ を解いて，$x=10^6x_0$ となるね。ものすごく大きな値で，ちょっと計算が大変そうだな。

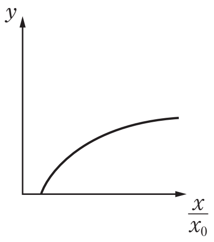
花子さん：そうね。これから先，いろいろな音の大きさ db と音圧の関係を計算するのに，いい方法はないかしら？

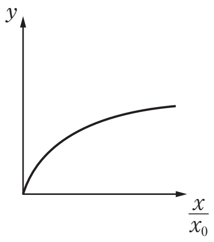
先生：座標軸の横軸に $\frac{x}{x_0}$ を 1 目盛りごとに 1 から始めて 10，10^2，10^3，…ととり，縦軸に y を 1 目盛りごとに 0 から始めて 10，20，30，…ととって（右図），関数 $y=20\log_{10}\frac{x}{x_0}$ のグラフをかくと サ となります。

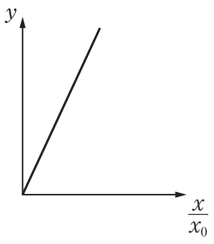


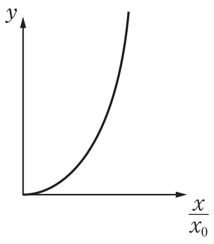
花子さん：なるほど，そのグラフを利用すると，簡単に求められそうです。

サ に適するものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪


①


②


③


このグラフを利用すると，ジェット機の音圧は静かな図書館の音圧の シ 倍であることが分かる。

シ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 10　① 10^2　② 10^3　③ 10^4　④ 10^5　⑤ 10^6

＜ NOTE ＞

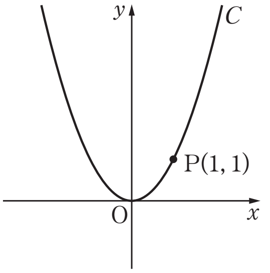
第２問

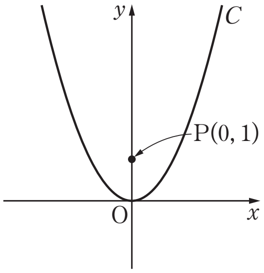
座標平面上に放物線 $C: y=x^2$ と点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ がある。

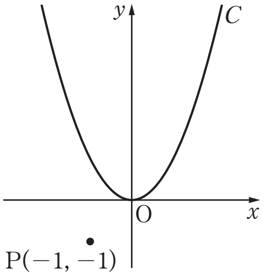
点Pを通る直線と放物線 C で囲まれた部分の面積が最小となるのは，どのような場合かを以下のように考えた。

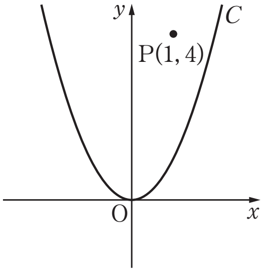
ただし，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は不等式 $s^2-t<0$ の表す領域にあるとし，点Pを通る直線は y 軸と平行ではないものとする。

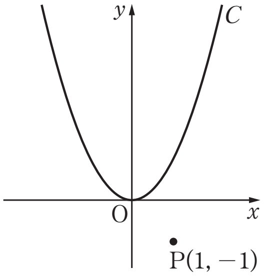
(1)　点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が⓪～⑤の各座標のとき，不等式 $s^2-t<0$ を満たすものを，次の⓪～⑤のうちから**すべて選べ**。　[ア]

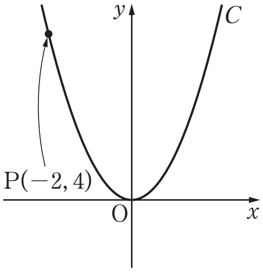
⓪


①


②


③


④


⑤


（第２問は次ページに続く。）

(2) 点 P(s, t) を通り，傾きが m である直線 ℓ の方程式は [イ] である。

(1)における点 P の存在位置から，直線 ℓ と放物線 C は異なる 2 点 A(α, α^2), B(β, β^2) ($\alpha<\beta$) で交わることが分かる。このとき，α, β を解とする 2 次方程式は [ウ] であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\boxed{\text{エ}},\quad \alpha\beta=\boxed{\text{オ}}$$

となる。

[イ], [ウ], [エ], [オ] に当てはまる式を，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

[イ] の解答群

⓪ $y=mx+s+t$　① $y=mx-ms+t$

② $y=mx+ms+t$　③ $y=mx+ms-t$

[ウ] の解答群

⓪ $x^2-mx+ms-t=0$　① $x^2-mx-s-t=0$

② $x^2-mx-ms+t=0$　③ $x^2-mx-ms-t=0$

[エ] の解答群

⓪ ms　① mt

② $-m$　③ m

[オ] の解答群

⓪ $-ms+t$　① $ms-t$

② t　③ $m(ms-t)$

(第２問は次ページに続く。)

(3) 点Ｐを通り，傾きが m である直線 ℓ と放物線 C で囲まれた部分の面積を $S(m)$ とおく。

定積分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ を利用すると

$$S(m)=\frac{\left(m^{\boxed{カ}}-\boxed{キ}\,ms+\boxed{ク}\,t\right)^{\frac{3}{2}}}{\boxed{ケ}}$$

となる。

3点A，B，Ｐは一直線上にあるから，面積 $S(m)$ が最小になるときの点Ｐについて $\boxed{コ}$ がいえる。

$\boxed{コ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ 点Ｐは線分 AB と y 軸との交点である。

① 点Ｐは線分 AB と ∠AOB の二等分線との交点である。

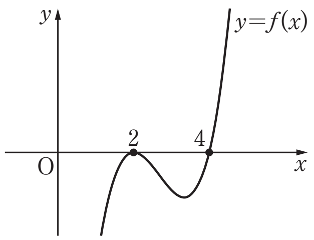
② 点Ｐは線分 AB を 2：1 に内分する点である。

③ 点Ｐは線分 AB の中点である。

④ 点Ｐは直線 AB と直線 OP が垂直となるような点である。

(第２問は次ページに続く。)

(4)　面積 $S(m)$ が最小になるときの直線 ℓ の方程式を $y=ax+b$ （a，b は定数）とする。
3 次関数 $y=x^3-cx^2+18x-15$ （c は定数）のグラフを L とし，$f(x)=(x^3-cx^2+18x-15)-(ax+b)$ とおくと，関数 $f(x)$ のグラフは右図のようになった。



(i)　図から読み取れる記述として正しいものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。
[サ]

⓪　直線 ℓ と曲線 L は，$x<4$ の範囲で異なる 3 個の共有点をもつ。
①　直線 ℓ は，曲線 L より $x<4$ の範囲で常に上側にある。
②　直線 ℓ と曲線 L は，$2<x<4$ の範囲で異なる 2 個の共有点をもつ。
③　直線 ℓ と曲線 L は，x 座標が 2 である点で接する。
④　直線 ℓ と曲線 L は，x 座標が 2 と 4 である点で接する。

(ii)　(i)より，$f(x)=$ [シ] とおくことができるから，a，b，c の値を求めると
$a=$ [スセ]，$b=$ [ソ]，$c=$ [タ]
となる。
このとき，点 P の座標は ([チツ]，[テ]) である。
[シ] に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$(x-2)^2(x-4)$
①　$(x+2)^2(x+4)$
②　$(x-2)(x-4)^2$
③　$(x-2)(x-3)(x-4)$
④　$a(x-2)^2(x-4)$

第７講　実践演習問題 第１問・第２問

第１問

〔１〕

(1)

$$
\begin{array}{r}
x-3 \\
x-1\,\big)\,\overline{x^2-4x+7} \\
\underline{x^2-x} \\
-3x+7 \\
\underline{-3x+3} \\
4
\end{array}
$$

商　$x-3$　余り　4

(2)　(1)より　$x^2-4x+7=(x-1)(x-3)+4$

よって，$\cos\theta=\dfrac{x-1}{x^2-4x+7}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)+4}=\dfrac{1}{x-3+\dfrac{4}{x-1}}$

ここで，$x-3+\dfrac{4}{x-1}=x-1+\dfrac{4}{x-1}-2$

$x-1>0$，$\dfrac{4}{x-1}>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係（⓪）から

$$x-1+\frac{4}{x-1}\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}=4$$

よって，$x-3+\dfrac{4}{x-1}\geqq 2$ $\left(\text{等号成立は } x-1=\dfrac{4}{x-1} \text{ すなわち } x-1=2 \text{ より}\right.$

$\left.x=3 \text{ のとき}\right)$

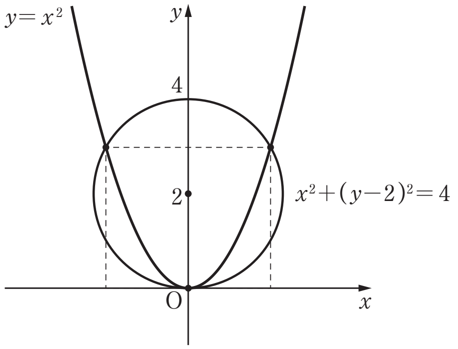
したがって　$\dfrac{1}{x-3+\dfrac{4}{x-1}}\leqq\dfrac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに θ は $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，つまり $x=3$ のとき最小値 $\dfrac{\pi}{3}$ をとる。

〔２〕

(1)　$a=2$ のとき，放物線 $L：y=x^2$ と円 $C：x^2+(y-2)^2=4$ の共有点の個数は，$y=x^2$ を $x^2+(y-2)^2=4$ に代入してできる２次方程式 $y+(y-2)^2=4$ すなわち $y^2-3y=0$ の解 $y=0$，３によって定



まる。

$x^2 \geqq 0$ より $x^2=y \geqq 0$ であり，

　　$y=0$ のとき x は 1 個 $(x=0)$

　　$y>0$ である y に対して，x は 2 個

定まる。2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が 0 と正の数が 1 つ（②）であることから，放物線 L と円 C の共有点の個数は 3 個である。

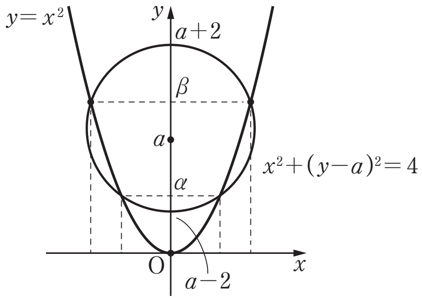
(2)　放物線 $L: y=x^2$ と

円 $C: x^2+(y-a)^2=4$ の共有点の個数は，

$y=x^2$ を $x^2+(y-a)^2=4$ に代入してできる 2 次方程式 $y+(y-a)^2=4$

すなわち $y^2-(2a-1)y+a^2-4=0$ ……①

の解 $y=\alpha,\ \beta$ によって定まり，



　　$y=0$ のとき x は 1 個 $(x=0)$

　　$y>0$ である y に対して，x は 2 個

定まる。

よって，放物線 L と円 C の共有点の個数が 4 個になるためには，①が異なる 2 つの正の実数解をもてばよい。その条件は

　　$D>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$

よって $D>0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$（④）

〔3〕

(1)　$y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ に $y=10$ を代入して

$$10=20\log_{10}\frac{x}{x_0} \qquad \log_{10}\frac{x}{x_0}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2} \qquad \frac{x}{x_0}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$

よって $x=\sqrt{10}\,x_0$ より，人の呼吸音の音圧は x_0 の $\sqrt{10}$（④）倍

(2)　$y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ に $x=x_1,\ y=40$ を代入して

$$\log_{10}\frac{x_1}{x_0}=\frac{40}{20}=2 \qquad \frac{x_1}{x_0}=10^2 \quad \text{よって } x_1=10^2x_0$$

$y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ に $x=x_2,\ y=80$ を代入して

$$\log_{10}\frac{x_2}{x_0}=\frac{80}{20}=4 \qquad \frac{x_2}{x_0}=10^4 \quad \text{よって } x_2=10^4x_0$$

よって，地下鉄の車内の音圧 x_2 は，静かな図書館の音圧 x_1 の

$\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{10^4x_0}{10^2x_0}=10^2=100$ 倍（⑤）

（別解）

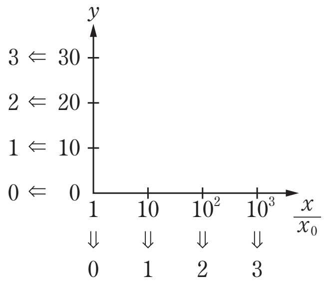
$\log_{10}\dfrac{x_1}{x_0}=2$，$\log_{10}\dfrac{x_2}{x_0}=4$

$$\log_{10}\frac{x_2}{x_1}=\log_{10}\frac{x_2}{x_0}\cdot\frac{x_0}{x_1}=\log_{10}\frac{x_2}{x_0}\cdot\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{-1}=\log_{10}\frac{x_2}{x_0}+\log_{10}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{-1}$$

$$=\log_{10}\frac{x_2}{x_0}-\log_{10}\frac{x_1}{x_0}=4-2=2$$

よって $\dfrac{x_2}{x_1}=10^2=100$ より，地下鉄の車内の音圧 x_2 は，静かな図書館の音圧 x_1 の 100 倍

(3)　$\log_{10}\dfrac{x}{x_0}=X$，$\dfrac{y}{10}=Y$ とおくと



$y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ すなわち $\dfrac{y}{10}=2\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ は

$Y=2X$ と表される。

したがって，関数 $y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ のグラフは，比例のグラフを表す ②

静かな図書館の音の大きさは

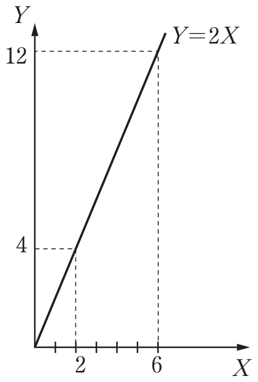
40 db，すなわち $y=40$ より

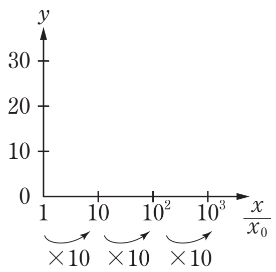
　　$Y=4$　このとき $X=2$

ジェット機の音の大きさは

120 db，すなわち $y=120$ より

　　$Y=12$　このとき $X=6$





X の値が 1 増加すると $\dfrac{x}{x_0}$ の値は 10 倍となる。

$X=2$ から $X=6$ までの X の増加量は 4 であるからジェット機の音圧は，静かな図書館の音圧の 10^4 倍（③）

第２問

⑴ ⓪～⑤のそれぞれにおいて，点Ｐの x 座標 s，y 座標 t を $s^2-t<0$ に代入して成立するものは ① と ③

（別解） $s^2-t<0$ すなわち $t>s^2$ が成立

$\Longleftrightarrow$ 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が $y>x^2$ の表す領域にある。

$\Longleftrightarrow$ 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が放物線 $y=x^2$ の上側の部分にある。

これを満たすものは ① と ③

⑵ 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ を通り，傾きが m である直線 ℓ の方程式は

$\ell : y=m(x-s)+t$ すなわち $y=mx-ms+t$ （①）

⑴より直線 ℓ と放物線 C は異なる２点で交わる。その２点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とする。

２つの交点Ａ，Ｂの x 座標 α，β は，x についての２次方程式

$x^2=mx-ms+t$ つまり $x^2-mx+ms-t=0$ （⓪）

の２つの実数解である。したがって，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=m$ （③），$\alpha\beta=ms-t$ （①）

⑶ $S(m)=\displaystyle\int_\alpha^\beta\{(mx-ms+t)-x^2\}\,dx$

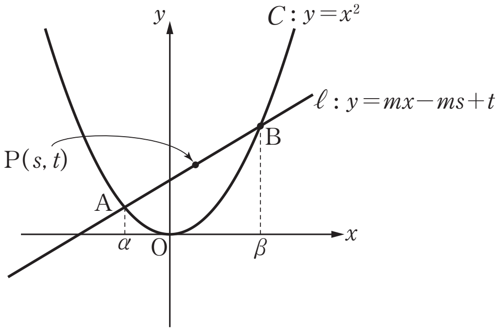
$=-\displaystyle\int_\alpha^\beta(x^2-mx+ms-t)\,dx$

$=-\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=-\left\{-\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}\right\}$

$=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

$=\dfrac{\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}}{6}$



ここで $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4(ms-t)=m^2-4ms+4t$ より

$S(m)=\dfrac{(m^2-4ms+4t)^{\frac{3}{2}}}{6}$

$m^2-4ms+4t=(m-2s)^2-4s^2+4t$ より，$m=2s$ のときに $S(m)$ は最小となる。

このとき $s=\dfrac{m}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であり，３点Ａ，Ｂ，Ｐが一直線上にあることから，点Ｐは線分ABの中点である（③）

(4)　$m=2s$ のとき，直線 ℓ：$y=2sx-2s^2+t$ を，$y=ax+b$ とおく。この直線 ℓ と３次関数 L：$y=x^3-cx^2+18x-15$ のグラフの共有点の x 座標は，３次方程式

$$x^3-cx^2+18x-15=ax+b \text{ つまり } x^3-cx^2+18x-15-(ax+b)=0$$

の実数解であり，それは $y=f(x)=x^3-cx^2+18x-15-(ax+b)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標である。

(i)　グラフより $y=f(x)$ のグラフと x 軸は，$x=2$ で接し，$x=4$ で交点をもつ。したがって，直線 ℓ と曲線 L は，x 座標が２である点で接し（③），x 座標が４である点で交わる。

(ii)　関数 $f(x)$ の３次の係数が１であることから

$$f(x)=(x-2)^2(x-4) \quad (⓪)$$

とおくことができ，展開して整理すると　$f(x)=x^3-8x^2+20x-16$

これと，$f(x)=x^3-cx^2+18x-15-(ax+b)=x^3-cx^2+(18-a)x-(15+b)$ を係数比較して

$$\begin{cases} c=8 \\ 18-a=20 \\ 15+b=16 \end{cases} \qquad \text{よって} \quad a=-2,\ b=1,\ c=8$$

また，直線 ℓ：$y=2sx-2s^2+t$ を，$y=ax+b$ とおいたことから，

$2s=a$，$-2s^2+t=b$

よって　$s=-1$，$t=3$　　したがって，点Ｐの座標は $(-1,\ 3)$